Данная методичка является логическим продолжением ММФ1.
Напомним, что происходит.
Есть уравнение Ш-Л

$$(p(x)y')' - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0$$

К которому добавляются однородные ГУ.
Уравнение Ш-Л + ГУ = Задача Ш-Л, ЗШЛ.

И почему-то кафмат с завидной регулярностью требовал, чтобы функции p и ρ были положительными, а q неотрицательной. Почему?

Дело в том, что в этом случае мы можем гарантировать, что у задачи Ш-Л. существует НЕПРЕРЫВНОЕ двухпараметрическое решение на [a..b].
В самом деле, курс дифуров нам, конечно, обещал двухпараметрическое решение $C1*y_1(x)+C2*y_2(x)$. Но не обещал непрерывность на [a..b]! А вдруг решение – тангенс или гипербола?
А даже если функции будут непрерывные, у нас же ещё два однородных ГУ. Ща как подставим в оба ГУ и получим C1=C2=0. Такой вариант нас не устраивает!

Так что условие существования решения оказывается очень кстати! Но для этого требуется, чтобы функции p и ρ были положительными, а q неотрицательной.

А что будет, если это не так?
Назовём уравнения, где хоть одно этих условий не так – ОУШЛ (обобщёнными УШЛ), а задачи, ими порождённые – ОЗШЛ.
Nobody cares. Будут ли вообще λ, при которых ОЗШЛ будет иметь нетривиальное решение – в каждом случае индивидуально. А если их будет – сколько: конечное или бесконечное число? Опять-таки индивидуально.

Давайте рассмотрим пример. Могилевский на второй лекции доказывает такую теорему:
Это т.н. лемма об особой точке:
1. Сформулируйте лемму о поведении решений уравнения $(k(x)u'(x))' - q(x)u = 0, x \in (a,b)$, где $k(x) = (x-a)\varphi(x), \varphi(a) \neq 0$, в особых точках.
Итак, вот она:

$$[k(x)u'(x)]' - q(x)u(x) = 0, x \in (a,b)$$

$1) k(x) > 0$ на (a,b)

$2) k(x) = (x-a)\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ непрерывна на $[a,b], \varphi(a) \neq 0$

- ⇨ Хотя бы одно из двух решений двухпараметрического решения будет стремиться к 0 при стремлении x к a.

Как мы видим, p(x) будет нулём в одной точке – левой границе. И это уже приведёт к тому, что одно из решений будет неограниченным! Мы получим решение C1*y_1(x)+C2* y_2(x), но хотя бы одно из них (для условности, y_2(x)) будет при x->a стремится к бесконечности.
Давайте сперва обсудим фразу «хотя бы одно». А может, и оба? Может и оба, если мы неудачно выберем ФСР. Если мы обозначим
y_3=y1+y2
y_4=y1-y2
C3=(C3-C4)/2
C4=(C1+C2)/2
То решение запишется как C3*y_3(x)+C4* y_4(x), но на бесконечность, если раньше y_1 не уходила, будет стремиться уже обе.
Вот так вот. Всего лишь ноль на границе, а уже такое ☺

Посмотрим на конкретных примерах.
Вот уравнение Бесселя:
уравнение Бесселя в дивергентной форме:

$$\boxed{\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dR(x)}{dx}\right) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)R(x) = 0}$$

Или же

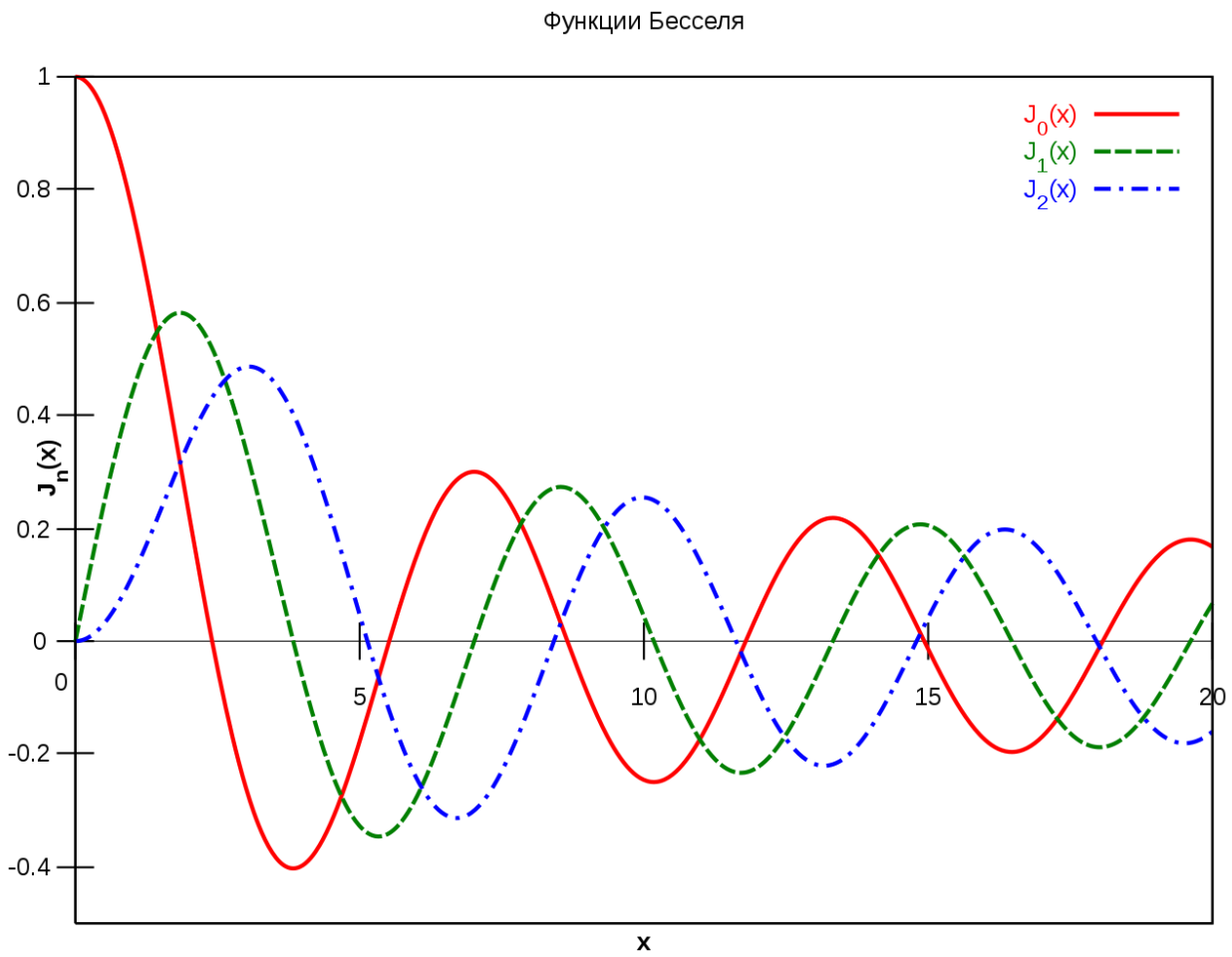
$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dR(x)}{dx}\right) + \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right)R(x) = 0$$

x менятеся от 0 до r включительно. Смотрим: при x=0 p(x) обнуляется. Уже не выполняется условие строгой положительности p.
Казалось бы, одна точка, а в остальных p положительна. И к чему это приводит? Да к тому, что ФСР уравнения Бесселя:
У(x) = C1 * J_ν(x) + C2 * N_ν(x)
Должна, согласно той теореме, состоять из минимум одной неограниченной в той особой точке функции!

Проверяем. $J_\nu(x)$ вполне себе ограничена. Значит, проблемы с ограниченностью как раз у функции Неймана. В роли точки особой, выступает, естественно, точка 0. Так оно и есть – Нейман неограничен.
Какие бы нам подставить краевые условия?
Для задачи Бесселя это

$$|y(0)| < \infty; \quad |y(x_0)| = 0$$

(напомним, что x связан с r соотношением
$x = \sqrt{\lambda} r$, x_0 тогда соответствует r_0)
Вполне естественно: бесконечность нам нигде не нужна (в том числе в центре), а при $x=x_0$ мы получаем границу, на которой плёнка жёстко зажата пяльцами, поэтому там отклонение от горизонтальной плоскости 0.
Такое граничное условие нам обрубит функцию Неймана (и поделом, нефиг на бесконечность уходить) и оставит лишь функцию Бесселя. А напомните нам её график:



Ну вот мы должны подобрать такое λ, чтобы $J_\nu(x_0)$ был 0 (напомним, что $x = \sqrt{\lambda} r$, а радиус пяльца, на которое натянута плёнка, нам дан). Полученные λ и называются СФ.

Нам попалось граничное условие «на границе y… не равно чему-то, а всего лишь конечно». Это граничное условие, кажется, в разы лояльней тех, которые у нас были до этого: вместо равенств требуется всего лишь ограниченность.
Но если для старых, ρр-положительных условие ограниченности на одной и двух или обеих границ в большинстве случаев было бессмысленным (если границы конечны – то точно бессмысленным, если одна из границ бесконечна – имело смысл лишь если одна из $y_1(x)$ $y_2(x)$ при стремлении x к бесконечности также уходила на бесконечность), то вот для ОУШЛ, где функции могут уходить на бесконечность где им вздумается, оно играет новыми красками. Если одна из функций уходит на бесконечность, то наше условие её жёстко отрубает. Это мы уже видели на примере уравнения Бесселя, подытожим: получаем решение $C1*y_1(x)+C2*y_2(x)$, но только вот хотя бы одно из решений (например, $y_2(x)$), будет уходить на бесконечность при x->0. Значит, мы должны его отбросить, положив C2=0, и проверять второе граничное условие уже на $C1*y_1(x)$.

Вот вам ещё один пример, высосанный из пальца, зато попроще.
Пусть решение имеет вид C1*1/x+C2*sin(λx) , а их меняется от 0 до π.

$$|y(0)| < \infty; \quad y(\pi) = 0$$

Из-за левого граничного условия C1=0. Значит, C2 не 0. Тогда sin(λπ), т.е. λ – любое целое число. Таким образом, СЗ – все целые λ, а СФ - sin(λπ).